

Oscillateur harmonique et liaison covalente

L'oscillateur harmonique est un modèle d'oscillateur qui intervient dans de nombreux domaines de la physique. Son intérêt vient du fait qu'il est capable de décrire l'évolution temporelle de tout système physique faiblement perturbé autour d'une position d'équilibre stable.

Cette évolution est régie par l'équation différentielle suivante : $\ddot{W} + \omega_0^2 \cdot W = 0$

W est une grandeur physique qui varie au cours du temps et ω_0 est appelée pulsation propre de l'oscillateur.

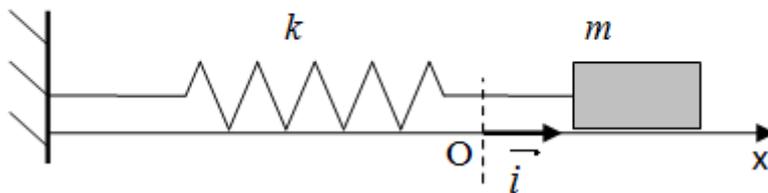
1. Le pendule élastique non amorti

Un pendule élastique horizontal est constitué d'un solide de masse m attaché à l'une des extrémités d'un ressort à spires non jointives de masse négligeable et de constante de raideur k dont l'autre extrémité est fixée à un support fixe (voir schéma ci-dessous reproduit en annexe). Le solide glisse alors sans frottement le long d'un axe horizontal (O, x) ; le point O correspond à la position d'équilibre du centre d'inertie du solide.

Données :

- Constante de raideur du ressort $k = 8,0 \text{ N.m}^{-1}$
- Masse du solide $m = 400 \text{ g}$

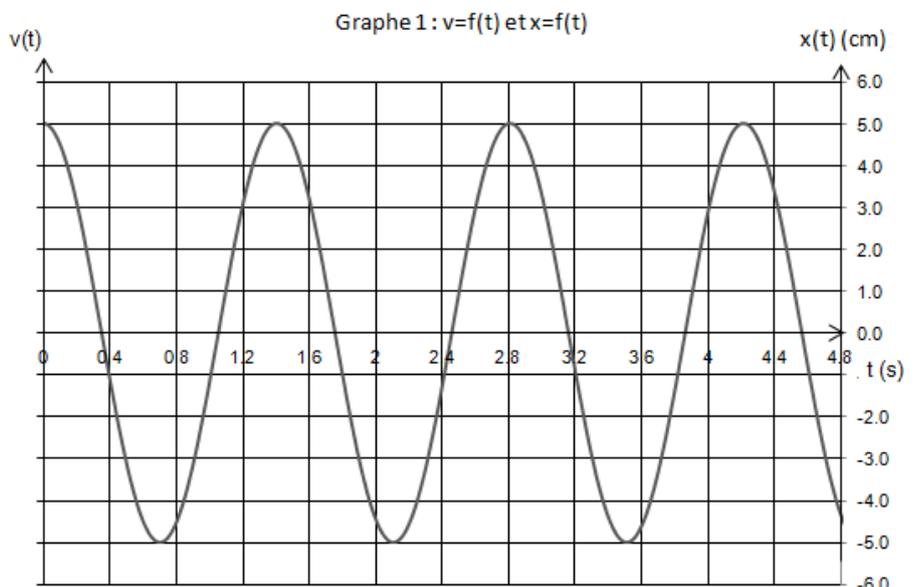
Schéma : le pendule élastique à $t=0$



A $t = 0$, le solide est lâché sans vitesse initiale à partir de sa position d'élongation maximale $x(0) = X_m > 0$. A l'instant t , la position du solide est repérée par l'abscisse $x(t)$ sur l'axe. $x(t)$ représente également l'allongement du ressort : $x = 0 \text{ m}$ lorsque le centre d'inertie du solide se trouve au point O .

Un dispositif d'acquisition a permis d'obtenir l'enregistrement donné en annexe exercice 2 (graphe 1).

- Quelle est la nature des oscillations obtenues ?
- Déterminer graphiquement la valeur de l'amplitude maximale X_m à l'aide du graphe 1.
- Déterminer graphiquement de la façon la plus précise possible la période propre expérimentale T_{exp} .

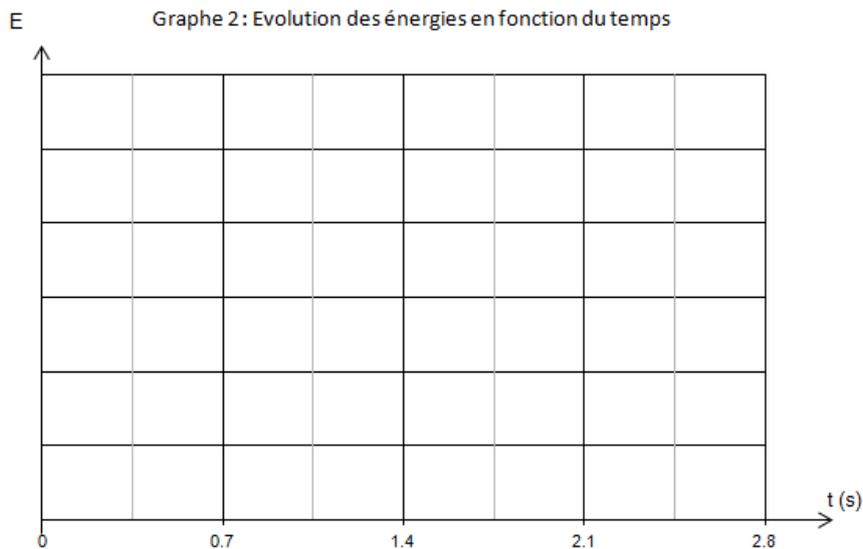


2. Etude du mouvement

- a. Compléter le schéma 1 en annexe en indiquant les forces que subit le solide lorsqu'il est en mouvement.
- b. Etablir l'équation du mouvement reliant l'élongation x du pendule élastique à son accélération.
- c. Exprimer la pulsation propre ω_0 en fonction de k et m .
- d. En déduire l'expression de la période propre théorique T_{th} puis la calculer. Comparer la valeur expérimentale T_{exp} à la valeur théorique T_{th} .

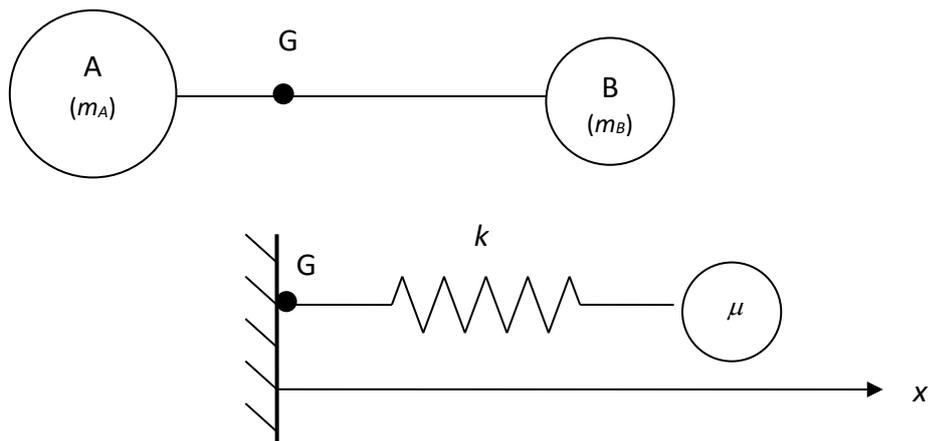
La solution de l'équation différentielle du mouvement du pendule est : $x(t) = X_m \cdot \cos(\omega_0 t)$.

- e. Donner l'expression de la vitesse $v(t)$.
- f. Exprimer V_m en fonction de k , m et X_m et calculer sa valeur. Représenter sur le graphe 1 en annexe l'évolution de la vitesse en fonction du temps. Préciser l'échelle choisie sur l'axe verticale de gauche.
- g. Donner les expressions littérales des énergies cinétique $E_c(t)$ et potentielle élastique $E_p(t)$ du pendule en fonction de k , X_m , ω_0 et t .
- h. Montrer que l'énergie mécanique du pendule élastique est constante dans le temps. Déterminer la valeur de l'énergie mécanique.
- i. Représenter l'ensemble de ces énergies sur le graphe 2 en annexe. Compléter l'échelle choisie pour l'axe des énergies.



3. Modélisation d'une liaison covalente

On peut modéliser une liaison covalente entre deux atomes $A - B$ par un oscillateur harmonique de masse équivalente $\mu = \frac{m_A \times m_B}{m_A + m_B}$ oscillant par rapport au point fixe G. (voir schéma ci-dessous).



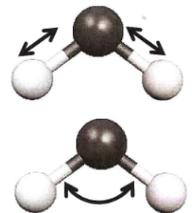
Données :

- masses molaires : $M(O) = 16,00 \text{ g.mol}^{-1}$ et $M(H) = 1,00 \text{ g.mol}^{-1}$
- nombre d'Avogadro : $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.
- la vitesse de propagation de la lumière dans le vide $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m/s}$.

- Exprimer puis calculer la masse équivalente μ_{OH} dans le cas de la liaison OH.
- Pour la liaison $O - H$, la constante de raideur du ressort équivalent vaut : $k = 720 \text{ N.m}^{-1}$. Calculer la période propre T_0 de vibration de cette molécule.
- La spectroscopie infrarouge exploite le fait que les molécules absorbent de façon intense les ondes électromagnétiques dont la fréquence est proche de la fréquence propre de vibration de liaison covalente dans la molécule. L'énergie absorbée fait « vibrer » ou « tord » les liaisons covalentes de la molécule.

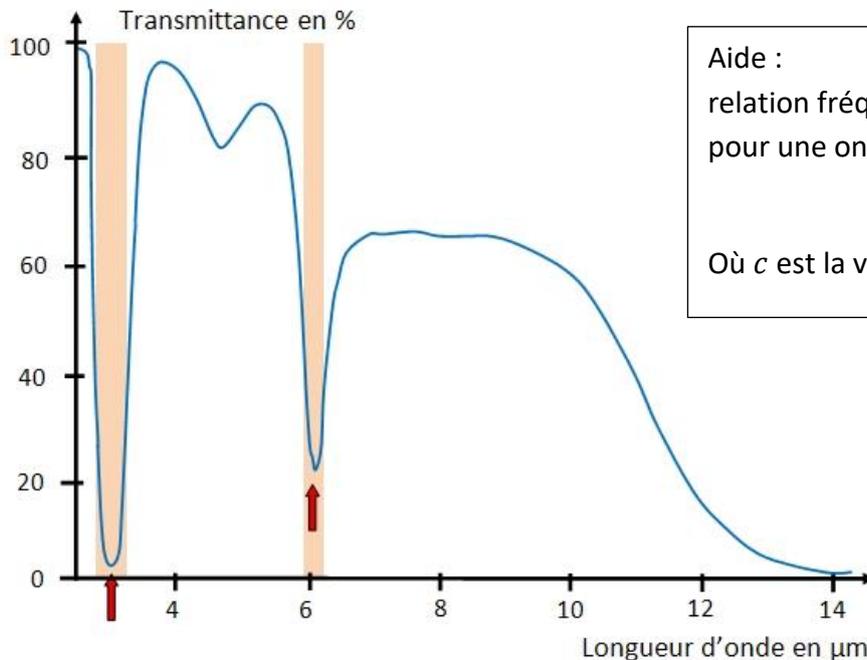
La molécule par exemple absorbe du rayonnement dans l'infrarouge. Elle présente principalement deux modes de vibration :

- un mode de vibration d'élongation (stretching) :
les deux liaisons s'allongent et se raccourcissent simultanément
- un mode de vibration de déformation : L'angle entre les liaisons H–O–H oscille



https://fr.wikipedia.org/wiki/Absorption_du_rayonnement_%C3%A9lectromagn%C3%A9tique_par_l'eau#/media/Fichier:Scissoring.gif

On donne ci-dessous le spectre infrarouge de l'eau. Déterminer quel pic correspond à une vibration d'élongation.



Aide :
relation fréquence f – longueur d'onde λ
pour une onde électromagnétique :
$$f = \frac{c}{\lambda}$$

Où c est la vitesse de la lumière

Saut à l'élastique

Le saut à élastique peut être pratiqué à partir d'un pont dominant une rivière d'une hauteur assez importante. L'exercice n'est pas sans danger : outre une rupture de l'élastique, il faut soigneusement calculer la longueur de l'élastique.

Pour éviter l'accident, on cherche à modéliser le saut.

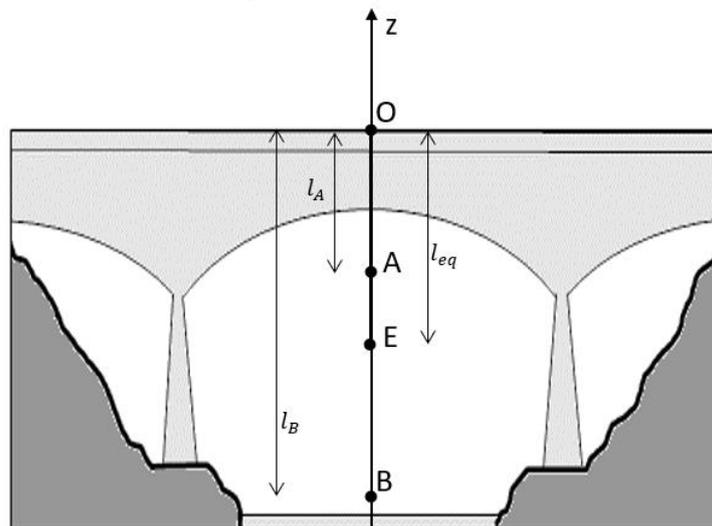
Les conditions du saut :

- Le sauteur a une masse $M = 62 \text{ kg}$. Il se laisse tomber du pont sans vitesse initiale.
- L'élastique utilisé peut supporter une tension maximale de 2500 N . Au-delà, il y a risque de rupture. On considère que l'élastique tendu se comporte comme un ressort idéal, de masse négligeable, de longueur à vide l_A et de constante de raideur k .
- Le haut du pont est situé à 70 m au-dessus du niveau de l'eau de la rivière.

La modélisation du saut :

On s'intéresse uniquement au mouvement du centre d'inertie du sauteur.

Sa trajectoire est verticale le long de l'axe (Oz) dirigé vers le haut. A $t=0$, le centre d'inertie du sauteur est en haut du pont au point O pris comme origine du repère.



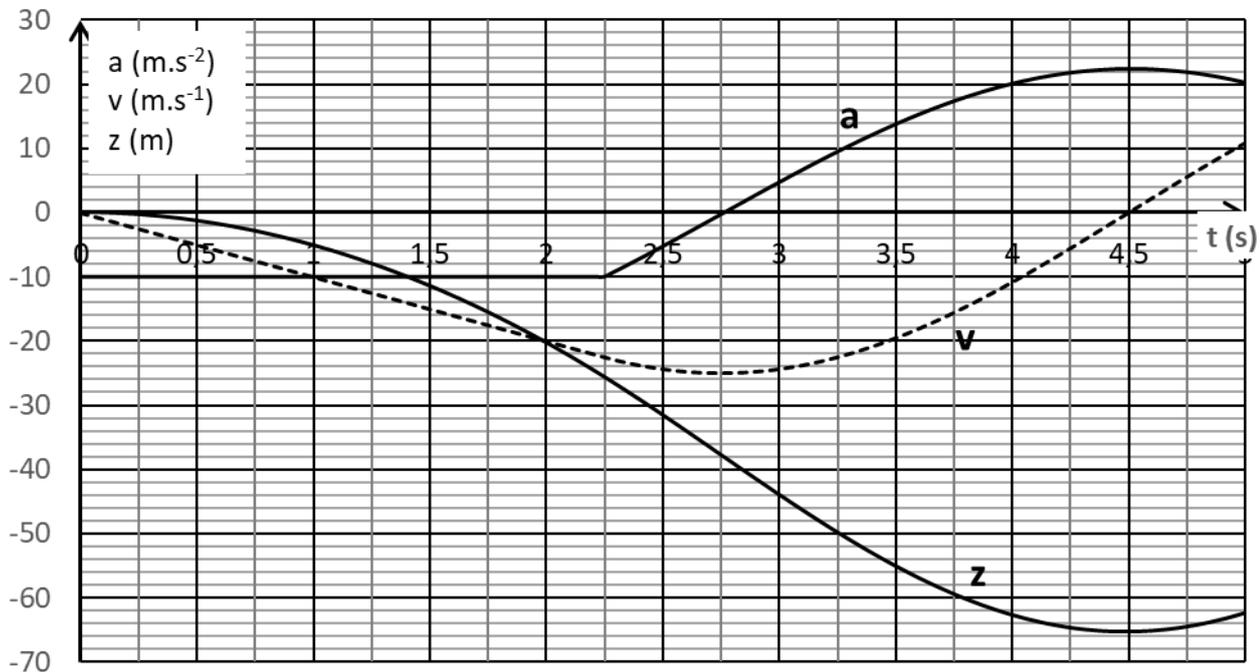
- Entre O et A , l'élastique n'est pas tendu et n'exerce aucune action.
- En A , il atteint sa longueur à vide l_A .
- Après A , l'élastique se tend et exerce une force de rappel \vec{F} .
- En B , le sauteur se trouve au point le plus bas de sa trajectoire. L'élastique atteint alors sa longueur maximale.
- On a aussi représenté le point E correspondant à la position d'équilibre finale du sauteur. L'élastique a alors une longueur l_{eq} .

Dans tout l'exercice on prend $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

I. Modélisation en négligeant les actions de frottement :

La modélisation permet d'obtenir le graphique de la figure 1 représentant les coordonnées de la position z du sauteur, sa vitesse v , et son accélération a en fonction du temps.

Figure 1



1. Etude de la 1^{ère} partie du saut entre O et A. A l'instant t_A le sauteur est en A.
 - a. En utilisant la figure 1, déterminer la date t_A et justifier que le sauteur est en chute libre avant cet instant (aucune équation horaire n'est demandée).
 - b. Déterminer en utilisant la figure 1, les valeurs numériques de la vitesse v_A du sauteur et de la longueur l_A de l'élastique à la date t_A .
 - c. Etablir les équations horaires $v(t)$ et $z(t)$ pour cette partie du mouvement et retrouver par le calcul les valeurs de v_A et l_A .
2. Etude de la 2^{ème} partie du saut entre A et B.
 - a. On note B le point le plus bas de la trajectoire du sauteur et t_B la date à laquelle il atteint ce point. Pour la suite de l'exercice, on prendra $l_A = 25 \text{ m}$.
 - b. Déterminer graphiquement la date t_B , ainsi que la valeur de l'accélération a_B du sauteur et la position z_B du sauteur à cet instant.
 - c. Faire le bilan des forces qui agissent sur le sauteur à l'instant t_B .
 - d. En utilisant un des résultats de la question 1.2.1., déterminer la valeur de la force exercée par l'élastique sur le sauteur à t_B .
 - e. A partir des résultats des questions précédentes, conclure quant à la sécurité du saut. Deux arguments sont attendus.
3. Constante de raideur de l'élastique.

En utilisant la figure 1 et le passage à la position d'équilibre, estimer la valeur du coefficient de raideur k de l'élastique. Expliquer la démarche suivie.
4. Etude du mouvement après l'instant t_2 .

On s'intéresse dans cette partie au mouvement du sauteur après son passage par la position la plus

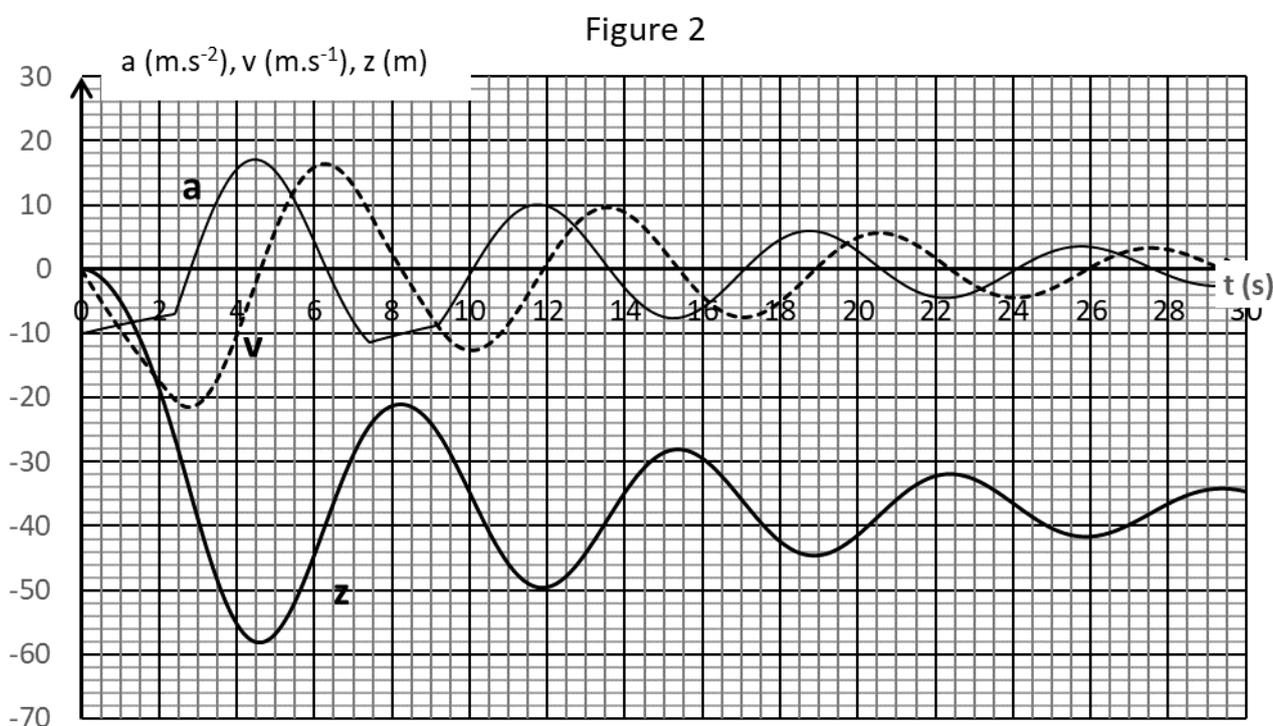
basse. On considère que le sauteur et son élastique se comportent alors comme un oscillateur harmonique qui oscille autour de sa position d'équilibre. Dans le cas où les frottements sont négligeables, la position du sauteur vérifie alors l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2(z(t) + l_{eq})}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot (z(t) + l_{eq}) = 0$$

- Déterminer l'expression de ω pour que $z(t) = Z_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) - l_{eq}$ soit une solution de cette équation différentielle.
- En déduire l'expression de la période T_0 des oscillations auxquelles serait soumis le sauteur dans les conditions envisagées. Calculer la valeur de T_0 en prenant $k = 50 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.

5. Modélisation tenant compte des frottements

La modélisation permet d'obtenir le graphique de la figure 2 représentant les coordonnées de la position z du sauteur, sa vitesse v , et son accélération a en fonction du temps.



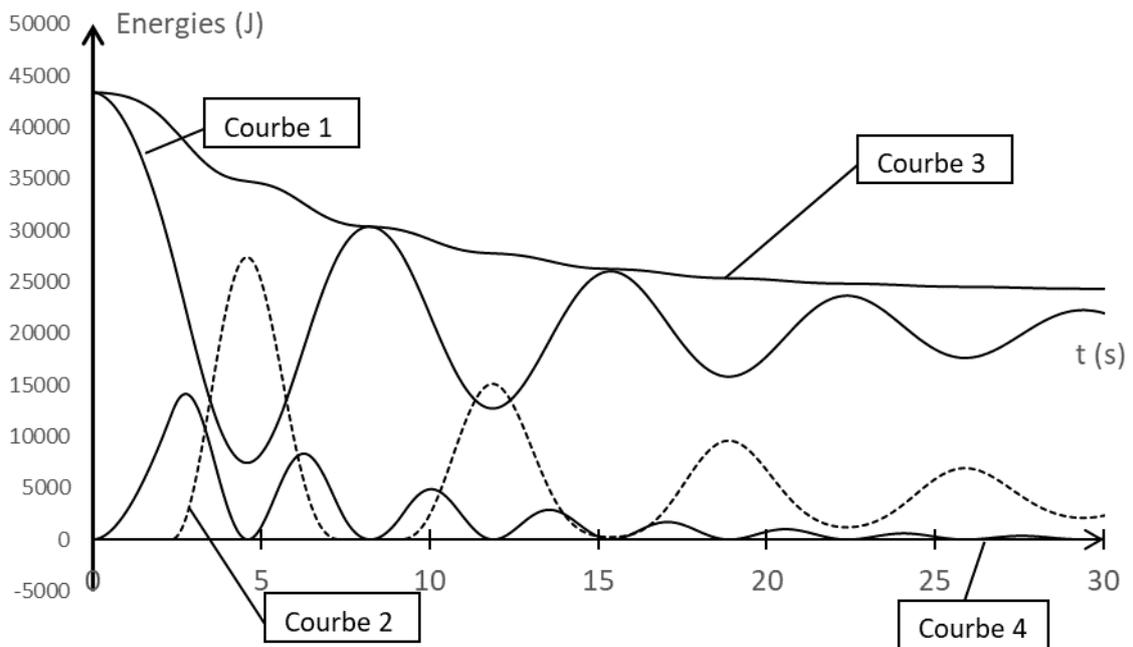
- Avant que l'élastique ne soit tendu, montrer à l'aide de la figure 2, l'existence de la force de frottement.
- Expliquer l'évolution de l'accélération entre les instants 7,5 s et 9 s. Aucun calcul n'est demandé.
- En analysant la figure 2, décrire le mouvement ultérieur du sauteur. On donnera en particulier une valeur approchée et un nom d'une durée T qui caractérise ce mouvement. Comparer T à la période T_0 calculée à la question 1.4.2.

6. Etude énergétique

On s'intéresse dans cette partie à l'évolution de l'énergie du sauteur.

La figure 3 représente entre autres l'évolution des énergies cinétique, potentielle de pesanteur et potentielle élastique.

Figure 3



On a pris comme origine de l'énergie potentielle de pesanteur le niveau de la surface de l'eau.

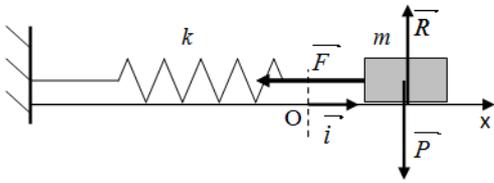
- Identifier la courbe correspondant à l'évolution de l'énergie cinétique. Justifier par deux arguments qui la caractérisent et la différencient des autres courbes.
- Identifier la courbe correspondant à l'évolution de l'énergie potentielle de pesanteur. Justifier par deux arguments qui la caractérisent et la différencient des autres courbes.
- Identifier la courbe correspondant à l'évolution de l'énergie potentielle élastique. Justifier par deux arguments qui la caractérisent et la différencient des autres courbes.
- Nommer l'énergie représentée par la courbe encore non identifiée. Décrire son évolution et proposer une cause de cette évolution.

Correction :

Oscillations libres, périodiques, non amorties

$$X_m = 5,0 \text{ cm}$$

$$2T_{exp} = 2,8 \text{ s} \text{ donc } T_{exp} = 1,4 \text{ s} \text{ (exiger 2 ou 3 périodes mesurées)}$$



$$2^{\text{ème}} \text{ loi de Newton : } \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\text{Projection sur l'axe Ox : } \vec{F} = -k \cdot x \cdot \vec{i} \quad \text{et} \quad \vec{a} = \ddot{x} \cdot \vec{i}$$

$$\text{D'où } \ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$$

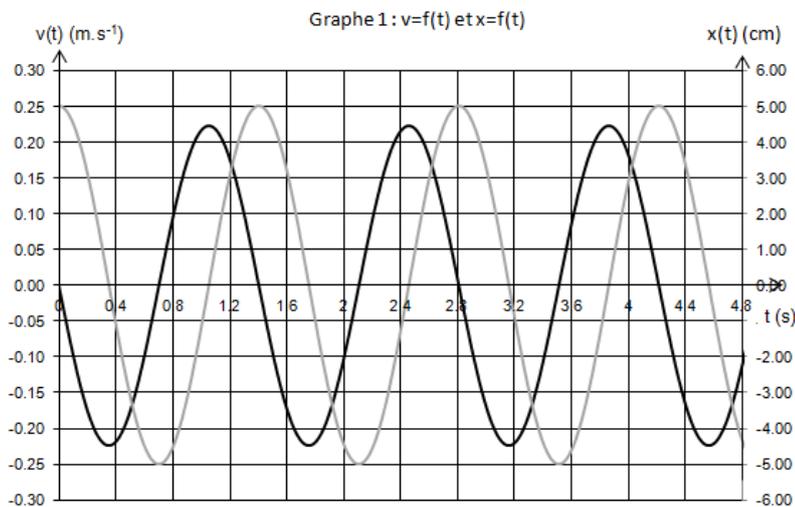
$$\text{Par identification } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T_{th} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{A.N.} \quad T_{th} = 1,4 \text{ s}$$

Les deux valeurs sont cohérentes

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 \cdot X_m \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$$

$$V_m = \omega_0 \cdot X_m = X_m \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} = 0,22 \text{ m.s}^{-1}$$

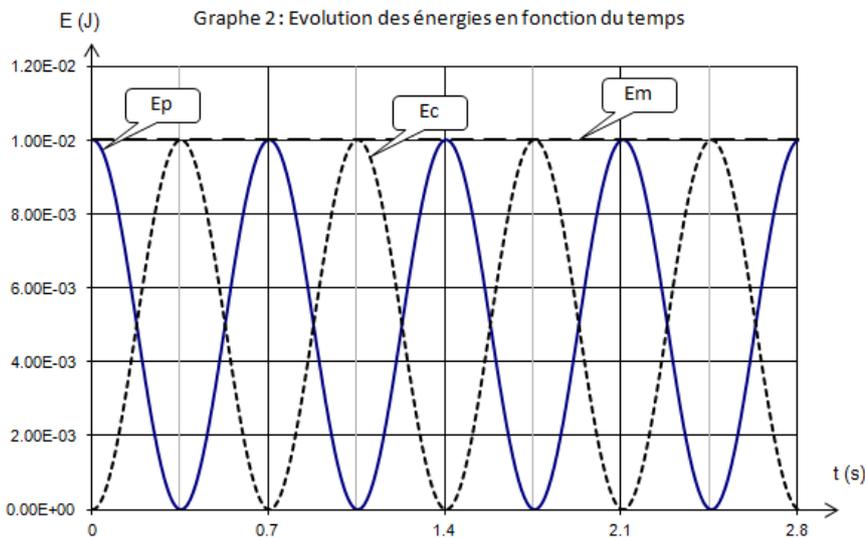


$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{X_m^2 \cdot k}{2} \cdot \sin^2(\omega_0 \cdot t) \quad E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{X_m^2 \cdot k}{2} \cdot \cos^2(\omega_0 \cdot t)$$

$$E_m = E_c + E_p = \frac{X_m^2 \cdot k}{2} \cdot \sin^2(\omega_0 \cdot t) + \frac{X_m^2 \cdot k}{2} \cdot \cos^2(\omega_0 \cdot t) = \frac{X_m^2 \cdot k}{2}$$

E_m ne dépend pas du temps ; reste constante.

$$\text{A.N.} \quad E_m = \frac{X_m^2 \cdot k}{2} = 1,0 \times 10^{-2} \text{ J}$$



A $t=0$:
 E_p maximale
 E_c nulle

Période :
 $T_{én} = T/2$

$E_m = \text{cste}$

$\mu_{OH} = \frac{m_O \cdot m_H}{m_O + m_H}$ où m_O et m_H sont les masses respectives d'un atome d'oxygène et d'un atome d'hydrogène.

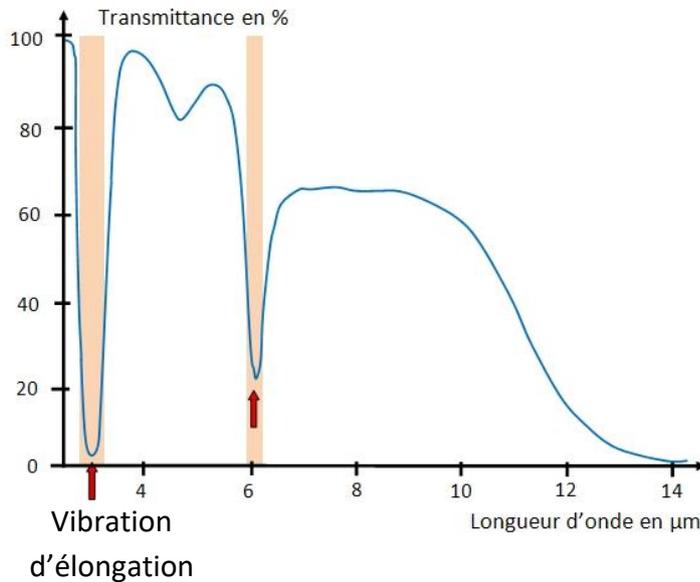
Avec $m_O = \frac{M_O}{N_A}$ et $m_H = \frac{M_H}{N_A}$: $\mu_{OH} = \frac{\frac{M_O \cdot M_H}{N_A^2}}{\frac{M_O + M_H}{N_A}} = \frac{M_O \cdot M_H}{N_A \cdot (M_O + M_H)}$

A.N. $\mu_{OH} = \frac{16 \times 1}{6,02 \times 10^{23} \times 17} = 1,56 \times 10^{-24} \text{ g}$ soit $1,56 \times 10^{-27} \text{ kg}$

$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\mu_{OH}}{k}}$ et $f_0 = \frac{1}{T_0}$

A.N. $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{1,56 \times 10^{-27}}{720}} = 9,25 \times 10^{-15} \text{ s}$ $f_0 = 1,1 \times 10^{14} \text{ Hz}$

$\lambda = \frac{c}{f_0}$ A.N. $\lambda = \frac{3,0 \times 10^8}{1,1 \times 10^{14}} = 2,7 \times 10^{-6} \text{ m}$



$$t_A = 2,25 \text{ s}$$

Jusqu'à cette date, $a = cste = -10 = -g$

Le sauteur ne subit que son poids ; il est en chute libre

$$\text{Accepter } 22 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} < v_A < 23 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$l_A = -z_A \quad \text{accepter} \quad 25 \text{ m} < l_A < 26 \text{ m}$$

Bilan des forces : poids : $\vec{P} = -m \cdot g \cdot \vec{k}$

$$2^{\text{ème}} \text{ loi de Newton : } \vec{P} = m \cdot \vec{a} \quad \text{soit} \quad -m \cdot g = m \cdot a$$

$$\text{D'où } a = -g$$

$$\text{Par intégration de l'accélération : } v(t) = -g \cdot t + 0$$

Car vitesse initiale nulle

$$\text{Par intégration de la vitesse : } z(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + 0$$

Car $z = 0$ à $t = 0$

$$\text{Calculs pour } t = t_A = 2,25 \text{ s : } v_A = -22,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$z_A = -5 \times (2,25)^2 = 25,3 \text{ m}$$

Les résultats coïncident avec les valeurs lues.

$$t_B = 4,50 \text{ s lorsque } v_B = 0$$

z_B est minimale (accepter $-66 \text{ m} < z_B < -65 \text{ m}$)

$$\text{On a alors : accepter } 22 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} < a_B < 23 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Bilan des forces : Poids : $\vec{P} = -m \cdot g \cdot \vec{k}$

Tension : $\vec{F} = F \cdot \vec{k}$

$$2^{\text{ème}} \text{ loi de Newton : } \vec{P} + \vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad \text{d'où} \quad -m \cdot g + F = m \cdot a$$

$$\text{Soit } F = m \cdot (a + g)$$

$$\text{A.N. } F = 62 \times (22 + 10) = 2,0 \times 10^3 \text{ N}$$

$$F = 62 \times (23 + 10) = 2,0 \times 10^3 \text{ N}$$

1^{er} argument :

$$\text{D'après l'énoncé : } z_{eau} = -70 \text{ m.}$$

$$\text{On sait que : } -66 \text{ m} < z_B < -65 \text{ m}$$

Donc : $z_{eau} < z_B$: le sauteur arrive au-dessus de la surface de l'eau au plus bas de sa trajectoire.

2^{ème} argument :

$$\text{D'après l'énoncé : } F_{limite} = 2500 \text{ N}$$

$$\text{On sait que : } F_{max} = F_B$$

$$\text{Et que : } F_B \approx 2000 \text{ N}$$

Donc : $F_{max} < F_{limite}$: l'élastique ne rompt pas

Lorsque le sauteur passe à la position d'équilibre, l'accélération est nulle ($a_{eq} = 0$).

D'après la figure 1, l'accélération est nulle à $t = t_{eq} = 2,75 \text{ s}$

A cet instant, par lecture graphique, accepter $-38 \text{ m} < z_{eq} < -37 \text{ m}$

On en déduit que la longueur à l'équilibre du ressort est :

$$l_{eq} = -z_{eq} \quad \text{accepter} \quad 37 \text{ m} < l_{eq} < 38 \text{ m}$$

Par ailleurs, au passage à la position d'équilibre, les forces se compensent :

$$\vec{P} + \vec{F} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \vec{P} = -m \cdot g \cdot \vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{F} = k \cdot (l_{eq} - l_A) \cdot \vec{k}$$

$$\text{Soit } -m \cdot g + k \cdot (l_{eq} - l_A) = 0$$

$$\text{D'où } k = \frac{m \cdot g}{l_{eq} - l_A}$$

$$\text{accepter } \frac{62 \times 10}{38 - 25} < k < \frac{62 \times 10}{37 - 25}$$

soit $48 \text{ N.m}^{-1} < k < 52 \text{ N.m}^{-1}$

Si $z(t) = Z_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) - l_{eq}$ alors $z + l_{eq} = Z_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$

D'où l'équation : $(-\omega^2 + \frac{k}{m}) \cdot Z_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = 0$

Cette équation est toujours vraie si : $-\omega^2 + \frac{k}{m} = 0$ soit $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Ou bien reconnaître l'équation d'un oscillateur harmonique et assimiler ω^2 à k/m

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ A.N. $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{62}{50}} = 7,0 \text{ s}$

Pour $t < t_A$, l'accélération diminue. Le sauteur n'est plus en chute libre

Conséquence : une force de frottement s'oppose au poids.

Entre 7,5 s et 9 s, l'élastique n'est plus tendu ($l > l_A$).

Le sauteur n'est soumis qu'à son poids et la force de frottement de l'air, comme entre 0 s et 2,25 s.

Il est en situation de chute freinée.

Après 9 s, le sauteur subit un mouvement d'oscillations amorties.

On peut déterminer graphiquement une pseudo-période T entre les instants $t_1 = 11,8 \text{ s}$ et $t_2 = 18,8 \text{ s}$ (assez précis sur les variations de a).

On a donc : $T = t_2 - t_1 = 7,0 \text{ s}$

On remarque que $T \approx T_0$

E_c est représentée par la courbe 4 :

- Nulle au départ (pas de vitesse initiale)
- Nulle à la fin lorsque les oscillations sont complètement amorties

E_p est représentée par la courbe 1 :

- Maximale au départ (sur le pont, point le plus haut de la trajectoire)
- Diminue puis augmente alternativement avec l'altitude du sauteur

E_k est représentée par la courbe 2 :

- Nulle pendant les phases du saut pour lesquelles $l > l_A$
- Non nulle à la fin lorsque le sauteur est suspendu à l'élastique

La courbe 3 représente l'énergie mécanique du système, soit

$$E_m = E_c + E_p + E_k$$

L'énergie mécanique diminue jusqu'à atteindre une valeur constante.

Cette diminution correspond à une dissipation sous forme de chaleur.